

$\neg, \forall, \exists$ $\&$ $\vee$ $\rightarrow$

Тройка $\langle \text{Const}, \text{Pred}, \text{Func} \rangle$ называется **сигнатурой** алфавита. $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — запись, обозначающая формулу φ , у которой $\text{Var } \varphi \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Если $\text{Var } \varphi = \emptyset$, то формула φ называется **замкнутой формулой, или предложением**. CForm — множество всех замкнутых формул.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **выполнимой в интерпретации I**, если существует такой набор элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **истинной в интерпретации I**, если для любого набора элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **выполнимой**, если есть интерпретация I, в которой эта формула выполнима.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **общезначимой (или тождественно истинной)**, если эта формула истинна в любой интерпретации.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **противоречивой (или невыполнимой)**, если она не является выполнимой.

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, $\Gamma \subseteq \text{CForm}$. Тогда каждая интерпретация I, в которой выполняются все формулы множества Γ , называется **моделью** для множества Γ . Модель для множества формул Γ — это интерпретация (реальный или виртуальный мир), устройство которого адекватно всем предложениям из множества Γ .

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, и φ — замкнутая формула. Формула φ называется **логическим следствием множества предложений (базы знаний) Γ** , если каждая модель для множества формул Γ является моделью для формулы φ , т. е. для любой интерпретации I : $I \models \Gamma \Rightarrow I \models \varphi$. Запись $\Gamma \models \varphi$ обозначает, что φ — логическое следствие Γ . Поэтому для обозначения общезначимости формулы φ будем использовать запись $\models \varphi$.

Теорема о логическом следствии: Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq \text{CForm}$, $\varphi \in \text{CForm}$. Тогда $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \models (\psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi)$.
(доказательство — по определениям)

Утверждение. Для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ верно, что

1. $\models \varphi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$;
2. $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — выполнимая $\Leftrightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ — выполнимая;
3. $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — выполнима в любой интерпретации $\Leftrightarrow \models \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Утверждение. Существует такая замкнутая формула φ , которая истинна в любой интерпретации I с конечной предметной областью D_I , но не является общезначимой.

Семантическая таблица — это упорядоченная пара множеств формул $\langle \Gamma; \Delta \rangle$, $\Gamma, \Delta \subseteq \text{Form}$. Γ — это множество формул, которые мы хотим считать истинными, Δ — это множество формул, которые мы хотим считать ложными.

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество свободных переменных в формулах множеств Γ, Δ .

Семантическая таблица $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ называется **выполнимой**, если существует такая интерпретация I и такой набор значений $d_1, d_2, \dots, d_n \in D_I$ свободных переменных, для которых

1. $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ для любой формулы φ , $\varphi \in \Gamma$
2. $I \not\models \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ для любой формулы ψ , $\psi \in \Delta$.

Закрытая семантическая таблица. Семантическая таблица $\langle \Gamma; \Delta \rangle$, у которой $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, называется закрытой.

Утверждение: Закрытая таблица невыполнима. **Атомарная семантическая таблица.** Семантическая таблица $\langle \Gamma; \Delta \rangle$, у которой множества Γ, Δ состоят только из атомарных формул, называется атомарной. **Утверждение:** Незакрытая атомарная таблица выполнима.

Доказательства через преобразование таблицы $T_\varphi = \langle \emptyset; \{\varphi\} \rangle$ к закрытой называются **логическим выводом**. Если в выводе участвуют семантические таблицы, то логический вывод называется **табличным семантическим выводом**.

Табличный вывод — это корневое дерево, в котором корнем является сама таблица, дуги выходят в соответствии с правилами табличного вывода, а листьями служат либо закрытые таблицы, либо атомарные таблицы

Успешный табличный вывод — если дерево вывода — конечно и все его листья — закрытые таблицы

Теорема корректности табличного вывода: Если для таблицы существует успешный табличный вывод, то она невыполнима (следует из определения, леммы о корректности правил [Каково бы ни было правило табличного вывода, исходная таблица выполнима $\Leftrightarrow$ выполнима таблица, порождённая правилом (одна или обе, если их 2)] и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц).

Следствие: Если для таблицы $T = \langle \emptyset | \varphi \rangle$ можно построить успешный табличный вывод, то $\models \varphi$

Теорема полноты табличного вывода: Если семантическая таблица T_0 невыполнима, то для T_0 существует успешный табличный вывод.

Теорема Геделя (о полноте): Если формула φ общезначима, то существует успешный табличный вывод для таблицы $T_\varphi = \langle \emptyset | \varphi \rangle$. (следует из теоремы полноты табличного вывода)

Теорема Левенгейма-Сколема: Формула φ выполнима $\iff \varphi$ имеет модель с конечной или счетно-бесконечной предметной областью. (Если φ выполнима, то тогда бы нашлась в соответствии с теоремой о полноте табличного вывода либо атомарная незакрытая таблица, либо счётная ветвь в табличном выводе)

Теорема Компактности Мальцева: $\Gamma \models \varphi \iff$ существует такое конечное подмножество Γ' , $\Gamma' \subseteq \Gamma$, что $\Gamma' \models \varphi$.

(следствие означает соответствующую невыполнимость таблицы, т.е. наличие успешного табличного вывода, т.е. его конечность, т.е. количество формул к которым был применён табличный вывод – конечно, а значит остальное можно обрезать и для нового конечного набора формул – этот табличный вывод останется верным)

Теорема о равносильной замене: $\models \psi \exists x \Rightarrow \models \varphi[\psi] \equiv \varphi[\psi/x]$ (Доказывается индукцией по числу связок и кванторов в формуле φ)

Предварительная нормальная форма (ПНФ) – $\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n M(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Теорема о ПНФ: Для любой замкнутой формулы существует предварительная нормальная формула

(Переименование переменных, потом удаление импликации, потом продвижение отрицания вглубь, вынесение кванторов наружу, приведение к КНФ)

Сколемовская стандартная форма (ССФ) – $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (без $\exists$)

Теорема о ССФ: Для любой замкнутой формулы существует такая сколемовская стандартная формула, что оно одна выполнима тогда и только тогда, когда выполнима другая (через лемму об удалении кванторов существования)

Теорема: Сколемовская стандартная форма невыполнима тогда и только тогда, когда множество формул (все отдельные конъюнкции с кванторами $\forall$) не имеет модели

Невыполнимая, противоречивая система дизъюнктов – система не имеющая ни одной модели, в которой бы выполнялись все дизъюнкты

Метод резолюций:

Проверка общезначимости формулы φ сводится к проверке противоречивости системы дизъюнктов S_φ .

Этап 1. Сведение проблемы общезначимости к проблеме противоречивости: $\varphi \rightarrow \varphi_0 = \neg \varphi$

Этап 2. Построение предваренной нормальной формы (ПНФ). $\varphi_0 \rightarrow \varphi_1 = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$

Этап 3. Построение сколемовской стандартной формы (ССФ). $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$

Этап 4. Построение системы дизъюнктов. $\varphi_2 \rightarrow S_\varphi = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$,

φ общезначима $\iff$ система дизъюнктов S_φ противоречива.

Эрбрановские интерпретации — это специальная разновидность интерпретаций, в основе которых лежат свободные алгебры.

Пусть задана некоторая сигнатура $\sigma = \langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$. Тогда **эрбрановским универсумом σ** называется множество термов $H_\sigma = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$, где $i = 0$ $H_0 = \{\text{Const}, \text{если Const} \neq \emptyset; \{c\}, \text{если Const} = \emptyset \text{ (эрбрановская константа)}\}$, $i \rightarrow i + 1$ $H_{i+1} = H_i \cup \{f^{(k)}(t_1, \dots, t_k) : f^{(k)} \in \text{Func}, t_1, \dots, t_k \in H_i\}$

Эрбрановский универсум — это множество всех термов, которые можно построить из констант и функциональных символов заданной сигнатуры (т.е. это предметная область эрбрановских интерпретаций). Термы эрбрановского универсума не содержат переменных и называются основными термами.

Эрбрановская H-интерпретация I_H = $\langle H_\sigma, \text{Const}_H(\text{с верхн. подчёрк}), \text{Func}_H(\text{с верхн. подчёрк}), \text{Pred}(\text{с верхн. подчёрк}) \rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$ состоит из

- стандартной предметной области — эрбрановского универсума H_σ
- стандартной оценки констант: $\text{Const}_H(c) = c$, т. е. значением каждого константного символа c является его собственное изображение
- стандартной оценки функциональных символов: $\text{Func}_H(f(n)) = f : f(t_1, t_2, \dots, t_n) = f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, т. е. каждый функциональный символ f играет роль конструктора термов эрбрановского универсума
- произвольной оценки предикатных символов.

Теорема о Н –интерпретациях: Система дизъюнктов S выполнима тогда и только тогда, когда S имеет эрбрановскую модель, т.е. выполнима хотя бы в одной Н -интерпретации. (В одну сторону очевидно, а в другую – построим гомоморфное отображение) Следствие: Система дизъюнктов S противоречива тогда и только тогда, когда S невыполнима ни в одной эрбрановской интерпретации.

Пусть $P^{(m)} \in \text{Pred}$, и $t_1, \dots, t_m \in \text{H}\sigma$ — набор основных термов. Тогда формула $P^{(m)}(t_1, \dots, t_m)$ называется **основным атомом**. Множество всех основных атомов называется **эрбрановским базисом** и обозначается B_H . Всякая Н-интерпретация I задается подмнож. B^I истинных осн. атомов: $B^I = \{P^{(m)}(t_1, \dots, t_m) : I \models P^{(m)}(t_1, \dots, t_m), \{t_1, \dots, t_m\} \subseteq H\}$.

Пусть имеется дизъюнкт $D = \forall x_1 \dots \forall x_m (L_1 \vee \dots \vee L_k)$ и набор основных термов $t_1, \dots, t_m$ из эрбрановского универсума $\text{H}\sigma$. Тогда дизъюнкт $D' = (L_1 \vee \dots \vee L_k)\{x_1/t_1, \dots, x_m/t_m\}$, полученный из D подстановкой основных термов $t_1, \dots, t_m$ вместо всех переменных дизъюнкта D называется **основным примером дизъюнкта D**.

Теорема Эрбрана: Система дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_N\}$ противоречива $\Leftrightarrow$ существует конечное противоречивое множество G' основных примеров дизъюнктов системы S . (система противоречива $\Leftrightarrow$ для каждой Н-интерпретации она противоречива, т.е. любой основной пример для некоторого дизъюнкта – ложен, а дальше - опираясь на теорему Компактности Мальцева, т.е. что всегда можно выделить конечное подмножество из множества)

Пусть E_1 и E_2 — два логических выражения (термы, атомы, формулы и др.) Подстановка θ называется **унификатором выражений** E_1 и E_2 , если $E_1\theta = E_2\theta$. Подстановка θ называется **наиболее общим унификатором (НОУ)** выражений E_1 и E_2 , если: 1) θ — унификатор выражений E_1 и E_2 , 2) для любого унификатора η выражений E_1 и E_2 существует такая подстановка ρ , для которой верно равенство $\eta = \theta\rho$. **НОУ(E_1, E_2)** — множество наиболее общих унификаторов выражений E_1 и E_2 . Подстановка θ называется **унификатором системы уравнений E** $E: \{t_1 = s_1; t_2 = s_2; \dots, t_n = s_n\}$ если для любого i , $1 \leq i \leq n$, термы $t_i\theta$ и $s_i\theta$ одинаковы. (Фактически, унификатор $\theta = \{x_1/r_1, \dots, x_k/r_k\}$ — это решение системы уравнений E в свободной алгебре термов). Соответствующим образом определяется и **наиболее общий унификатор системы уравнений**

Описание алгоритма унификации (Алгоритм Мартелли–Монтанари): Это — недетерминированный алгоритм, состоящий из 6 правил, которые можно применять в любом порядке до тех пор, пока: 1) либо ни одно из правил применить невозможно (построена приведенная система уравнений), 2) либо применяется правило, устанавливающее невозможность унификации.

Правило резолюции: Пусть $D_1 = D_1' \vee L_1$ и $D_2 = D_2' \vee \neg L_2$ — два дизъюнкта. Пусть $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$. Тогда дизъюнкт $D_0 = (D_1' \vee D_2')\theta$ называется **резольвентой** дизъюнктов D_1 и D_2 . Правило резолюции $\frac{D_1' \vee L_1, D_2' \vee \neg L_2}{(D_1' \vee D_2')\theta}$, $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

Правило склейки: Пусть $D_1 = D_1' \vee L_1 \vee L_2$ — дизъюнкт. Пусть $\eta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$. Тогда дизъюнкт $D_0 = (D_1' \vee L_1)\eta$ называется **склейкой** дизъюнкта D_1 . Пара литер L_1 и L_2 назыв. **склеиваемой парой**. Правило склейки $\frac{D_1' \vee L_1 \vee L_2}{(D_1' \vee L_1)\eta}$, $\eta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

Пусть $S = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ — система дизъюнктов. **Резолютивным выводом** из системы дизъюнктов S называется конечная последовательность дизъюнктов $D_1', D_2', \dots, D_i', D_{i+1}', \dots, D_n'$, в которой для любого i , $1 \leq i \leq n$, выполняется одно из трех условий: 1) либо D_i' — вариант некоторого дизъюнкта из S , 2) либо D_i' — резольвента дизъюнктов D_j' и D_k' , где $j, k < i$, 3) либо D_i' — склейка дизъюнкта D_j' , где $j < i$.

Дизъюнкты $D_1', D_2', \dots, D_n'$ считаются **резолютивно выводимыми** из системы S .

Резолютивный вывод называется **успешным** (или, подругому, **резолютивным опровержением**), если этот вывод оканчивается пустым дизъюнктом $\square$.

Теорема корректности резолютивного вывода: Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$, то S — противоречивая система дизъюнктов. (следует из лемм, доказывающих, что склейка и резольвента являются логическими следствиями) **Лемма 1:** Если D_0 — резольвента дизъюнктов D_1 и D_2 , то $D_1, D_2 \models D_0$

Лемма 2: Если D_0 — склейка дизъюнкта D , то $D \models D_0$.

Теорема о полноте резолютивного вывода: Если S — противоречивая система дизъюнктов, то из S резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$. (По теореме Эрбрана можно свести противор. сист. дизъюнктов к конечности, потом восп. леммой об основных примерах дизъюнктов, а потом перейдём от неё к самим дизъюнктам через лемму о подъёме)

Теорема полноты I-резолюции: Если система дизъюнктов S противоречива, то для любой интерпретации I существует успешный I-резолютивный вывод пустого дизъюнкта $\square$ из S .

Определение SLD-резолюции: Пусть: 1) $G = ? C_1, \dots, C_i, \dots, C_m$ — целевое утверждение, в котором выделена подцель C_i , 2) $D' = A_0' \leftarrow A_1', A_2', \dots, A_n'$ — вариант некоторого программного утверждения, в котором $\text{Var}G \cap \text{Var}D' = \emptyset$, 3) $\theta \in \text{НОУ}(C_i, A_0')$ — наиб. общ. унификатор подцели C_i и заголовка программного утверждения A_0' . Тогда запрос $G' = ?(C_1, \dots, C_{i-1}, A_1', A_2', \dots, A_n', C_{i+1}, \dots, C_m)\theta$ называется SLD-резольвентой программного утверждения D' и запроса G с выделенной подцелью C_i и унификатором θ .

Определение (SLD-резолютивного вычисления) Пусть: 1) $G_0 = ? C_1, C_2, \dots, C_m$ — целевое утверждение с целевыми переменными $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$, 2) $P = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ — хорновская логическая программа, 3) $\text{comp} = (D_{j1}, \theta_1, G_1), (D_{j2}, \theta_2, G_2), \dots, (D_{jn}, \theta_n, \square)$ — успешное SLD-резолютивное вычисление, порожденное запросом G к программе P .

Тогда подстановка $\theta = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n)|_{Y_1, Y_2, \dots, Y_k}$, представляющая собой композицию всех вычисленных унификаторов $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, ограниченную целевыми переменными $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$, называется **вычисленным ответом** на запрос G_0 к программе P .

Теорема (корректности операционной семантики): Пусть: 1) $G_0 = ? C_1, C_2, \dots, C_m$ — целевое утверждение, 2) $P = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ — хорновская логическая программа, 3) θ — вычисленный ответ на запрос G_0 к программе P . Тогда θ — правильный ответ на запрос G_0 к программе P . (Доказывается индукцией по длине вычисления)

Теорема полноты. Пусть: 1) $P = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ — хорновская логическая программа, 2) $G_0 = ? C_1, C_2, \dots, C_m$ — запрос с множеством целевых переменных $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$, 3) θ — правильный ответ на запрос G_0 к хорновской логической программе P . Тогда существует такой вычисленный ответ η на запрос G_0 к программе P , что $\theta = \eta\rho$ для некоторой подстановки ρ .

Теорема сильной полноты: Каково бы ни было правило выбора подцелей R , если θ — правильный ответ на запрос G_0 к хорновской логической программе P , то существует такой R -**вычисленный ответ** η , что равенство $\theta = \eta\rho$ выполняется для некоторой подстановки ρ .

Деревом SLD-резолютивных вычислений запроса G_0 к логической программе P называется помеченное корневое дерево $T_{G_0, P}$, удовлетворяющее следующим требованиям:

1. Корнем дерева является исходный запрос G_0
2. Потомками каждой вершины G являются всевозможные SLD-резольвенты запроса G (при фиксированном стандартном правиле выбора подцелей)
3. Листовыми вершинами являются пустые запросы (завершающие успешные вычисления) и запросы, не имеющие SLD-резольвент (завершающие тупиковые вычисления).

Определение правильного ответа: Пусть P — логическая программа, G — запрос к P с множеством целевых переменных $Y_1, \dots, Y_k$. Тогда всякая подстановка $\theta = \{Y_1/t_1, \dots, Y_k/t_k\}$ называется **ответом** на запрос G к программе P . Ответ $\theta = \{Y_1/t_1, \dots, Y_k/t_k\}$ называется **правильным ответом** на запрос G к программе P , если $P \models \forall Z_1 \dots \forall Z_N G\theta$, где $\{Z_1, \dots, Z_N\} = \bigcup_{i=1}^k \text{Var } t_i$.

Стратегией вычисления запросов к логическим программам называется алгоритм построения (обхода) дерева SLD-резолютивных вычислений $T_{G_0, P}$ всякого запроса G_0 к произвольной логической программе P .

Стратегия вычислений называется **вычислительно полной**, если для любого запроса G_0 и любой логической программы P эта стратегия строит (обнаруживает) все успешные вычисления запроса G_0 к программе P .

Стратегия обхода в ширину является вычислительно полной.

Стратегия обхода в глубину является вычислительно не полной.

Теорема Черча: не существует алгоритма, способного определить по заданной замкнутой формуле логики предикатов ϕ , является ли эта формула общезначимой, т. е. проблема общезначимости " $\models \phi$?" алгоритмически неразрешима. (просто потому что иначе задача проверки является ли заданная подстановка – вычисленным ответом была бы алгоритмически разрешима, что привело бы к алгоритмической разрешимости задачи останова MT) (Следствие Теоремы Тьюринга об алгоритмической неразрешимости проблемы останова)

Допущение Замкнутости Мира. Пусть имеется некоторое непротиворечивое множество замкнутых формул Γ (например, хорновская логическая программа) и замкнутая формула ϕ (например, запрос или отдельная подцель). Тогда формула $\neg\phi$ является логическим следствием множества Γ в допущении замкнутости мира $\Gamma \models_{CWA} \neg\phi$, если неверно, что ϕ логически следует из Γ , т. е. $\Gamma \not\models \phi$. (Здесь CWA — аббревиатура Closed World Assumption)

Правило SLDNF-резолюции

Пусть имеется запрос $G_0: ?not(C_0), C_1, \dots, C_n$ к программе P . Для вычисления SLDNF-резольвенты G_1

1. формируется запрос $G': ? C_0$ к программе P ;
2. проводится построение (обход) дерева вычислений T запроса $G': ? C_0$;
3. в зависимости от устройства дерева T возможен один из трех исходов:
 1. Успех. Дерево T конечно, и все его ветви (SLD-резольвентивные вычисления) являются тупиковыми.
 2. Неудача. При построении (обходе) дерева T было обнаружено успешное вычисление.
 3. Бесконечное вычисление. Дерево T бесконечно и при его построении (обходе) не было обнаружено успешных вычислений.

Интуиционистская интерпретация — это реляционная система $I = \langle S, R, \xi \rangle$, в которой

1. $S \neq \emptyset$ — множество состояний (состояний знания);
2. $R \subseteq S \times S$ — отношение переходов на S , которое является отношением нестрогого частичного порядка:
 1. рефлексивное $R(s, s)$;
 2. транзитивное $R(s_1, s_2) \& R(s_2, s_3) \Rightarrow R(s_1, s_3)$;
 3. антисимметричное $R(s_1, s_2) \& R(s_2, s_1) \Rightarrow s_1 = s_2$;
3. $\xi: S \times P \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$ — оценка атомарных формул, удовлетворяющая условию монотонности: $R(s_1, s_2) \& \xi(P, s_1) = \text{true} \Rightarrow \xi(P, s_2) = \text{true}$.

Формула ϕ называется **интуиционистски общезначимой** (законом интуиционистской логики), если для любой интерпретации I и для любого состояния s верно $I, s \models \phi$.

Теорема (корректности SLDNF-резолюции): Если запрос $G: ? not(C_0)$ к хорновской логической программе P имеет успешное SLDNF-резольвентивное вычисление, то $P \models_{CWA} \neg\exists y C_0$.

Отношение выполнимости для модальных формул: Пусть $I = \langle W, R, \xi \rangle$ — модель Крипке.

Тогда отношение выполнимости $I, s \models \phi$ формулы ϕ в мире s модели I определяется так:

1. если $\phi = P \in P$, то $I, s \models \phi \Leftrightarrow \xi(w, P) = \text{true}$;
2. $I, w \models \phi_1 \& \phi_2 \Leftrightarrow I, w \models \phi_1$ и $I, w \models \phi_2$;
3. $I, w \models \phi_1 \vee \phi_2 \Leftrightarrow I, w \models \phi_1$ или $I, w \models \phi_2$;
4. $I, w \models \phi_1 \rightarrow \phi_2 \Leftrightarrow I, w \not\models \phi_1$ или $I, w \models \phi_2$;
5. $I, w \models \neg\phi_1 \Leftrightarrow I, w \not\models \phi_1$;
6. $I, w \models \Box\phi \Leftrightarrow$ для любого альтернативного мира w' если $\langle w, w' \rangle \in R$, то $I, w' \models \phi$;
7. $I, w \models \Diamond\phi \Leftrightarrow$ существует такой альтернативный мир w' , что $\langle w, w' \rangle \in R$ и $I, w' \models \phi$.

Частичным вычислением программы π_0 на оценке переменных θ_0 в интерпретации I называется последовательность (конечная или бесконечная) состояний вычисления $\langle \pi_0, \theta_0 \rangle, \langle \pi_1, \theta_1 \rangle, \dots, \langle \pi_{n-1}, \theta_{n-1} \rangle, \langle \pi_n, \theta_n \rangle, \dots$, в которой для любого $n, n \geq 1$, выполняется отношение $\langle \pi_{n-1}, \theta_{n-1} \rangle \rightarrow_1 \langle \pi_n, \theta_n \rangle$.

Вычислением программы π_0 на оценке переменных θ_0 в интерпретации I называется всякое частичное вычисление, которое нельзя продолжить.

Программа π считается (частично) корректной, если для любых начальных данных, удовлетворяющих определенному условию ϕ , результат вычисления (если вычисление завершается) удовлетворяет определенному условию ψ . Определение (**частичной корректности программы**): Пусть ϕ, ψ — формулы логики предикатов, а π — императивная программа. Программа π называется частично корректной в интерпретации I относительно предусловия ϕ и постусловия ψ , если триплет $\phi\{\pi\}\psi$ выполним в интерпретации I , т. е. $I \models \phi\{\pi\}\psi$.

Определение. Триплетом Хоара (тройкой Хоара) называется всякое выражение вида $\varphi\{\pi\}\psi$, где φ, ψ — формулы логики предикатов, а π — императивная программа. Выполнимость триплетов Хоара в интерпретациях определяется так: $I \models \varphi\{\pi\}\psi \iff$ для любых оценок переменных θ, η , если $I \models \varphi\theta$ и $\langle \pi, \theta \rangle \rightarrow^*_1 \langle \emptyset, \eta \rangle$, то $I \models \psi\eta$.

Интерпретация PLTL — это темпоральная модель Крипке $I = \langle N, \leq, \xi \rangle$, где

1. $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество моментов времени
2. $\leq$ — отношение нестрогого линейного порядка на N
3. $\xi: N \times AP \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$ — оценка атомарных высказываний на шкале времени.

Темп. логика выполнения: Пусть $I = \langle N, \leq, \xi \rangle$ — темпоральная интерпретация (вычислительная трасса), $n \in N$ — момент времени (состояние вычисления), φ — формула PLTL.

Тогда отношение выполнимости $I, n \models \varphi$ формулы φ в момент времени n в интерпретации I определяется так.

1. Если $\varphi = p$, $p \in AP$ (т. е. φ — атомарное высказывание), то $I, n \models \varphi \iff \xi_n(p) = \text{true}$.
2. Если $\varphi = \varphi_1 \& \varphi_2$, то $I, n \models \varphi \iff I, n \models \varphi_1$ и $I, n \models \varphi_2$.
3. Аналогично $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, $\neg \varphi_1$
4. Если $\varphi = X\psi$, то $I, n \models \varphi \iff I, n+1 \models \psi$.
5. Если $\varphi = F\psi$, то $I, n \models \varphi \iff$ существует такое $k, k \geq 0$, что $I, n+k \models \psi$.
6. Если $\varphi = G\psi$, то $I, n \models \varphi \iff$ для любого $k, k \geq 0$, верно $I, n+k \models \psi$.
7. Если $\varphi = \chi U \psi$, то $I, n \models \varphi \iff$ существует такое $k, k \geq 0$, что $I, n+k \models \psi$, и для любого $i, 0 \leq i < k$, верно $I, n+i \models \chi$.
8. Если $\varphi = \chi R \psi$, то $I, n \models \varphi \iff$ либо для любого $k, k \geq 0$, верно $I, n+k \models \psi$, либо существует такое $k, k \geq 0$, что $I, n+k \models \chi$, и для любого $i, 0 \leq i \leq k$, верно $I, n+i \models \psi$.

Будем называть формулу PLTL φ

1. **выполнимой в интерпретации** I , если верно $I, 0 \models \varphi$ (обозначается $I \models \varphi$);
2. **PLTL-общезначимой**, если для любой интерпретации I верно $I \models \varphi$ (обозначается $\models \varphi$).

Размеченная система переходов (**LTS**, Labelled Transition System) — это пятерка $\langle AP, S, S_0, \rightarrow, \rho \rangle$, в которой AP — множество атомарных высказываний, S — непустое множество состояний вычислений, $S_0, S_0 \subseteq S$, — непустое подмножество начальных состояний, $\rightarrow \subseteq S \times S$, — тотальное отношение переходов, тотальность отношения $\rightarrow$ означает, что для любого состояния $s, s \in S$, существует такое состояние s' , что $s \rightarrow s'$ (т. е. из любого состояния можно сделать хотя бы один переход), $\rho: S \rightarrow 2^{AP}$ — функция разметки, приписывающая каждому состоянию вычислений $s, s \in S$, множество $\rho(s), \rho(s) \subseteq AP$, всех тех атомарных высказываний, которые являются истинными в состоянии s .

LTS для распределенной системы, состоящей из двух процессов π_1 и π_2 , взаимодействующих посредством разделяемых переменных, строится на основе семантики чередующихся вычислений. Состояниями LTS для системы $\pi_1 \parallel \pi_2$ объявляются наборы $(\text{count}_1, \text{count}_2, \xi_1, \xi_2, \chi)$, где $\text{count}_1, \text{count}_2$ — значения счетчиков команд процессов π_1 и π_2 , ξ_1, ξ_2 — подстановки, определяющие значения локальных переменных процессов π_1 и π_2 , χ — подстановка, определяющая значения разделяемых переменных.

Задача верификации моделей программ (model checking) для PLTL формулируется так: для заданной формулы PLTL φ и LTS M проверить $M \models \varphi$.

Система Хинтики: Это раскрашенный ориентированный граф, в котором вершины — это пары состояние и некоторое согласованное множество, а рёбрами в графе являются те пары, которые позволяют подтвердить все обещания основанные на next-подформулах и выполнить их в следующий момент.

Раскраска идёт по until-release-подформулам (по сути цвет означает, что именно в этой вершине произошёл перескок в правиле U или R)

Алгоритм верификации моделей программ: 1) Построить равносильную позитивную формулу, 2) Построить систему Хинтики, 3) Выделить множество подформул until-release и раскрасить граф, 4) Выделить радужные компоненты сильной связности, 5) Выделить множество всех вершин графа, из которых достижимы радужные компоненты сильной связности, 6) Выделить множество всех вершин, которые могут быть начальными, 7) Пересечь множества из 5-го и 6-го пункта.